UNESCO

ICMI

Centre Sciences
CCSTI de la région Centre

TOKAI UNIVERSITY



¿POR QUÉ LAS MATEMÁTICAS?

CUADERNO DE ACTIVIDADES

madrid
Concejalía de las Artes

CONDE DUQUE
Centro Cultural

Una exposición internacional realizada
por iniciativa de la UNESCO



¿POR QUÉ LAS MATEMÁTICAS?

CUADERNO DE ACTIVIDADES

sm

Una exposición internacional realizada
por iniciativa de la UNESCO

“¿POR QUÉ LAS MATEMÁTICAS? EXPERIENCING MATHEMATICS!”

La exposición “¿Por qué las matemáticas?” tiene su origen en las acciones emprendidas en el año 2000 por IMU (International Mathematical Union) con motivo de la celebración del Año Mundial de las Matemáticas y se inscribe dentro del marco de misiones culturales y científicas de la UNESCO. La exposición ha sido realizada por Centre Sciences, Orléans, Francia, junto a la Universidad de Tokai (Tokio-Japón) y la Universidad de Manila (Filipinas).

La exposición tiene lugar en el Centro Cultural Conde Duque del 17 de agosto al 29 de octubre de 2006, y se organiza dentro de las actividades culturales del Congreso Internacional de Matemáticos, Madrid 2006.

Comisarios de la exposición:
RAÚL IBÁÑEZ TORRES, ANTONIO PÉREZ SANZ.

Autores: Menchu Bas López, Aurora Bell-lloch Bell-lloch, Rosario del Rincón Ruíz
Coordinadores: Raúl Ibáñez Torres, Antonio Pérez Sanz

Coordinación editorial: Jose González López de Guereñu
Edición: Laura Sánchez Fernández
Fotografía: Javier Calbet
Ilustración: Estudio “Haciendo el león”, Domingo Duque Rivero, Isidro García Sepúlveda, Rosario del Rincón Ruíz
Diseño y maqueta: Isidro García Sepúlveda
Dirección editorial: Violeta Calvo

El Congreso Internacional de Matemáticos Madrid 2006 y la exposición ¿Por qué las Matemáticas?

Cada cuatro años los matemáticos de todo el mundo nos reunimos para evaluar los progresos matemáticos más relevantes que se han producido en esos años, para premiar las contribuciones más destacadas, para celebrar que las Matemáticas son una ciencia viva y para mirar al futuro. La inauguración de cada ICM (*International Congress of Mathematicians*) contiene uno de los momentos más esperados, la entrega de las Medallas Fields, consideradas como el Nobel de las Matemáticas, y que premia los logros más sobresalientes en la materia. En este acto también se otorgan otros dos premios, el Nevanlinna, a los desarrollos matemáticos para la Sociedad de la Información, y el Gauss, que se concederá por primera vez en Madrid para destacar aquellos progresos matemáticos que más repercusión hayan tenido en el desarrollo de la tecnología y la vida cotidiana.

La elección de Madrid para celebrar el Congreso simboliza el reconocimiento internacional al espectacular crecimiento de las matemáticas españolas en los últimos 20 años. De hecho, durante este período, los artículos de investigación firmados por matemáticos españoles en publicaciones internacionales han pasado de un 0,3 % a un 5 % en el cómputo mundial.

Sin embargo, desde la organización del ICM2006 hemos venido apostando porque este evento no sea solamente un acontecimiento para el mundo de las matemáticas, sino para toda la sociedad española. Por este motivo hemos organizado una triple exposición en el Centro Cultural Conde Duque (del 17 de agosto al 29 de octubre de 2006): "¿Por qué las Matemáticas?", "Arte fractal: belleza y Matemáticas" y "Demoscene: Matemáticas en movimiento".

La exposición "¿Por qué las Matemáticas?" pretende mostrar que las matemáticas son asombrosas, interesantes y útiles; accesibles a todos; juegan un papel en la vida diaria, y tienen mucha importancia en nuestra cultura, desarrollo y progreso. No es una exposición clásica, donde el visitante simplemente se dedica a mirar las obras, sino que es una exposición interactiva, una exposición para mirar, ver, jugar-tocar-experimentar y pensar.

¡Prohibido no tocar!

Raúl Ibáñez Torres, Antonio Pérez Sanz
Comisarios de la exposición *¿POR QUÉ LAS MATEMÁTICAS?*

INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS MADRID 2006

¿Por qué…

Una terrible pregunta planea, y ha planeado en todas las épocas, en las clases de matemáticas. Al iniciar un tema nuevo, al introducir un concepto matemático, hay una pregunta dramática que no siempre llega a formularse; es más, la mayoría de las veces se omite, por suerte para los profesores: *¿Y esto, a mí para qué me sirve?*, que en el fondo es la pregunta que da título a esta exposición: ***¿Por qué las Matemáticas?***

Si trasladamos a los alumnos la pregunta *¿Para qué sirven las matemáticas?*, incluso en los últimos cursos de la Educación Secundaria, después de más de diez años de clases de matemáticas, las respuestas se circunscriben en la inmensa mayoría al ámbito de la aritmética contable y mercantil, y poco más. Tantos años con clases de matemáticas desde Infantil, luego Primaria y ahora ya al final de la Secundaria, y nuestros alumnos no saben la respuesta a la pregunta más importante de todo el currículo de la asignatura: *¿Para qué, por qué las matemáticas...?*

Con la exposición ***¿Por qué las Matemáticas?*** los profesores, y sobre todo los alumnos, van a obtener no una, sino muchas respuestas a la pregunta. Porque ese es su objetivo principal: hacer visibles las matemáticas que hay detrás y a veces delante de nuestra realidad más cotidiana e inmediata. De una u otra forma, las matemáticas están presentes en la práctica totalidad de nuestros actos y en la producción y el funcionamiento de casi todos los objetos que nos rodean. Pero esta presencia es una presencia subterránea y oculta. Y no es nada simple hacerla aflorar, traerla a la superficie.

En nuestras aulas se presentan de manera más habitual de lo conveniente unas matemáticas ideales, con resultados cerrados y acabados, sin margen de error, fuera de cualquier contexto histórico, sin rostros y personajes detrás de los resultados estudiados. Unas matemáticas deshumanizadas, perfectas en cuanto a resultados pero muertas. Unas matemáticas de viejo museo, inertes, estáticas, sin evolución y muchas veces sin aplicación.

Esta exposición supone una ocasión única de mostrar a los alumnos que las matemáticas no son nada de eso. Que son una ciencia viva, que da respuestas concretas no a problemas abstractos sino a cuestiones de la más rabiosa actualidad. En este sentido, la exposición es un recurso didáctico de primer orden.

Ver, sentir, tocar... hacer matemáticas.

… las MATEMÁTICAS?

Si eres profesor...

Para los profesores, la exposición es una ocasión de acercar a los alumnos a manifestaciones matemáticas concretas, visibles y atractivas en situaciones familiares y próximas.

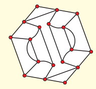
Las actividades de la exposición no requieren conocimientos matemáticos específicos, ni el dominio de fórmulas extrañas o algoritmos complicados. Exigen sólo un poco de concentración, razonamiento y una pizca de ingenio, y pueden resultar novedosas para muchos alumnos. Por eso, para abrir boca y a modo de entrenamiento, incluimos en esta publicación dos actividades por cada tema de la exposición, que no son las mismas que se encontrarán allí, cuyo objetivo principal es entrenar las neuronas de los futuros visitantes y familiarizarlos con un tipo de retos matemáticos algo distintos de los que habitualmente se les plantean en clase.

Desde estas páginas animo a todo el profesorado a no desaprovechar la ocasión de mostrar a sus alumnos la otra cara de las matemáticas, su verdadera cara, la de una ciencia viva, útil y funcional, pero sobre todo una ciencia hermosa.

Porque como bien pensaba G. H. Hardy:

> *"No hay lugar en este mundo para unas matemáticas que no sean bellas."*

Antonio Pérez Sanz

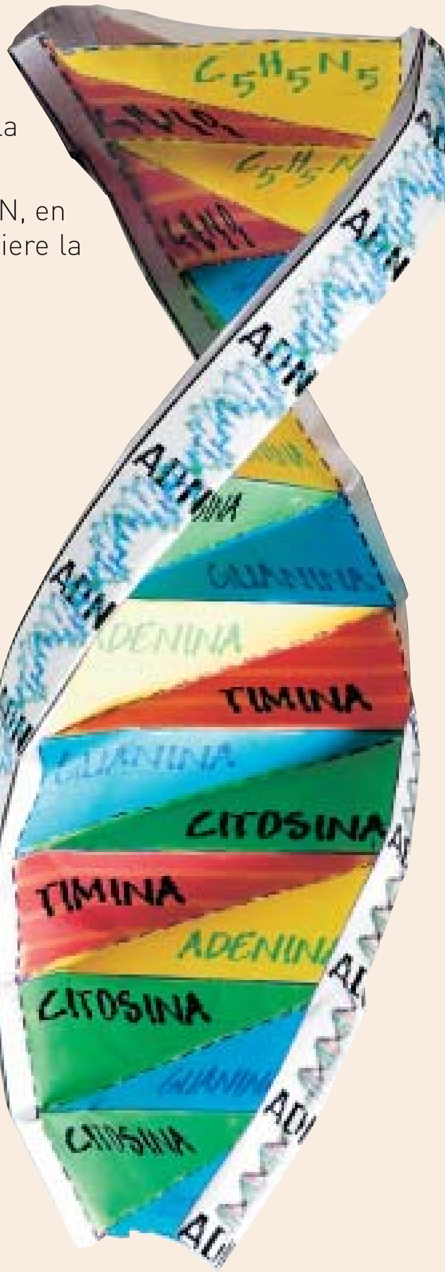


Índice





la Doble Hélice del ADN



La naturaleza opera siempre con la máxima economía posible.

La respuesta a la pregunta de por qué es la hélice una forma tan popular en la naturaleza podría ser que son formas idóneas para ahorrar espacio.

Una hélice, es la forma ideal para agrupar una molécula larguísima, como el ADN, en su pequeño espacio disponible dentro de la célula. Es la configuración que requiere la mínima cantidad de energía.



Material:
fotocopia de la plantilla a tamaño A4, tijeras y pegamento

Construye

Te proponemos hacer un trocito de ADN. La plantilla te servirá para hacer un modelo en papiroflexia.

1. Empieza doblando todas las líneas verticales. (fig. 1). Las líneas discontinuas se doblan *en valle (hacia dentro)* y las continuas *en montaña (hacia fuera)*.
2. Dobla la hoja sin marcar el doblez del centro como indica la figura 2 de tal forma que coincidan los *rectángulos* de delante con los que quedan por detrás. (fig. 2)

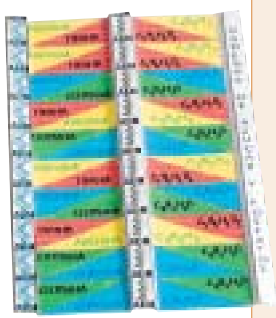


Fig.1

Fig.2



3. Dobla las líneas horizontales y las diagonales de los rectángulos. (hacemos a la vez las parejas de triángulos; unos quedan doblados en montaña y otros en valle). Marca bien el doblez. (fig. 3)

Fig.3



4. Coloca las tiras laterales dándole volumen, de manera que se lea la palabra ADN (fig. 4)

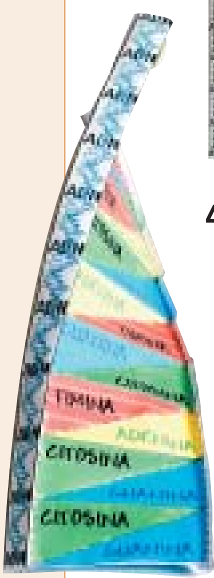


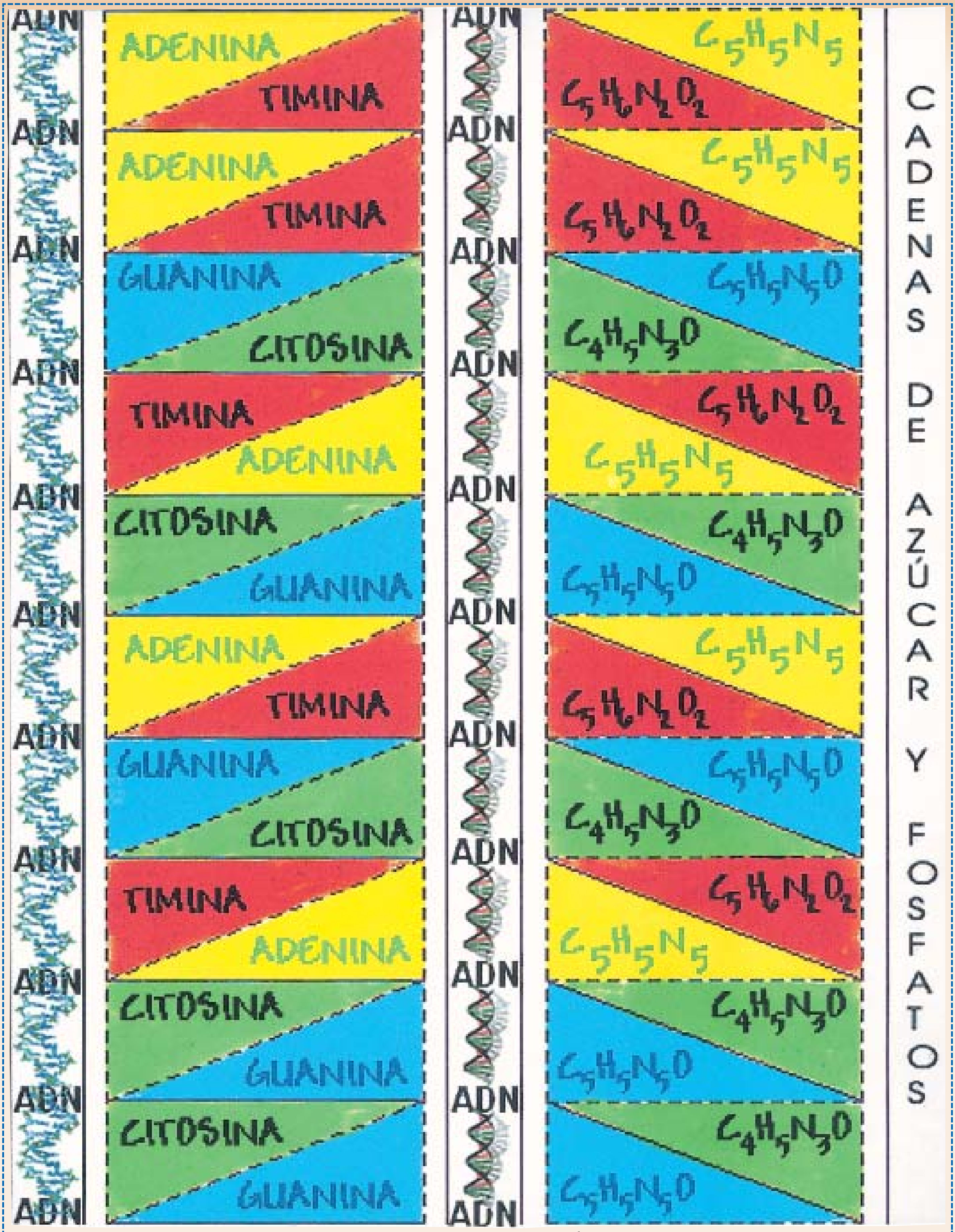
Fig.4

5. Pliega en acordeón con fuerza los triángulos según los dobleces que hemos creado. (fig.5)



Fig.5

6. Volvemos a colocar bien las dos tiras del paso 5 creando el modelo de ADN. Hemos obtenido también una escalera de caracol.



Plantilla de un trozo de una molécula de ADN



"... Ni las nubes son esferas, ni las montañas conos, ni las costas círculos (...) La existencia de estas formas representa un desafío.(...) En respuesta a este desafío concebí y desarrollé una nueva geometría de la naturaleza (...): la geometría fractal".

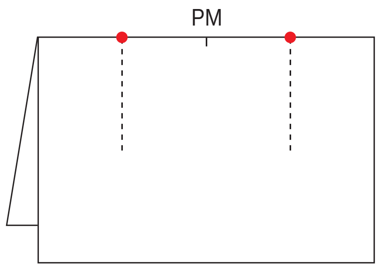
Benoît Mandelbrot

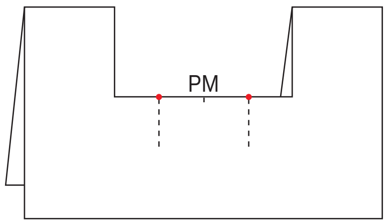
Un fractal es una forma similar a sí misma, cuyas partes reproducen una versión más pequeña del todo.

Construye

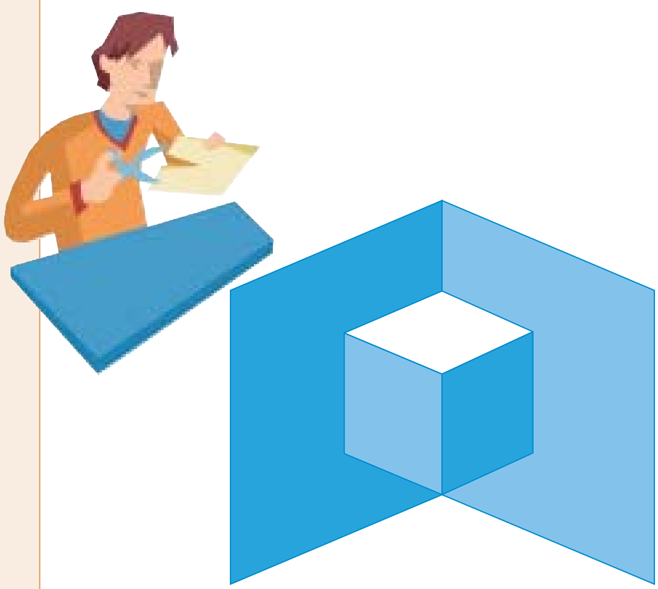
Material:
una hoja de papel y unas tijeras

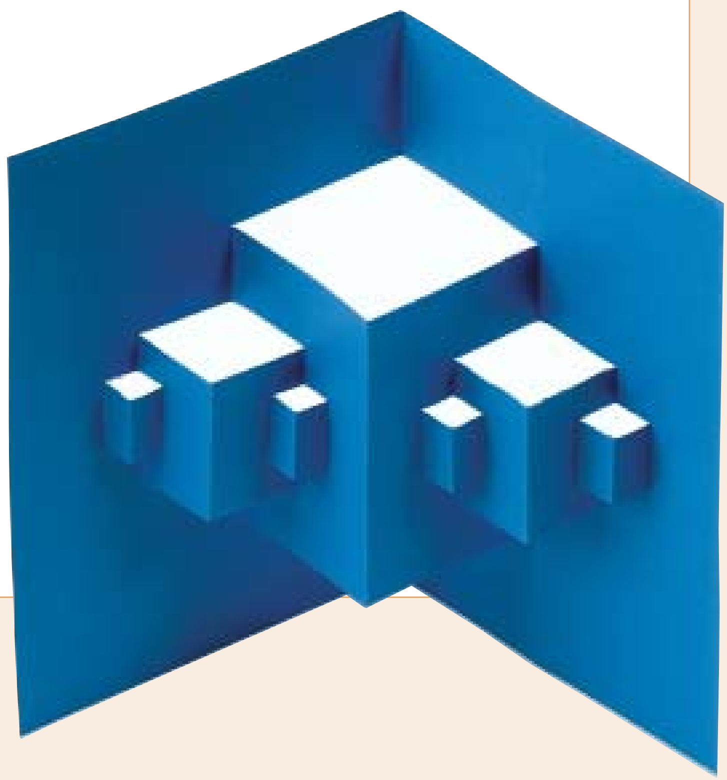
Vas a construir un fractal por iteración, es decir repitiendo varias veces el mismo proceso.





1. Dobla una hoja de papel por la mitad del lado más largo.
2. En el doblez señala el punto medio (PM) doblando un poquito el papel y luego el punto medio de cada mitad. Esos dos últimos puntos son los que nos importan.
3. En esos dos puntos haz un corte paralelo a los lados empezando desde el doblez y llegando hasta la mitad.
4. Ahora dobla hacia dentro la parte central cuidando que las partes laterales no se desdoblen. Te tiene que quedar como en los dibujos cuando la hoja está doblada y al desdoblar.
5. Repite ahora los pasos desde 2 hasta 4 en la parte central del doblez. Lo único diferente en el proceso es que ahora tienes que doblar hacia dentro 2 trozos de la parte central.
6. Sigue repitiendo ese mismo proceso hasta que no puedas seguir doblando y cortando.

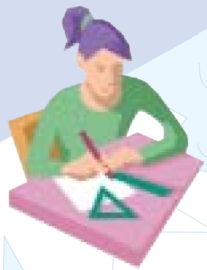




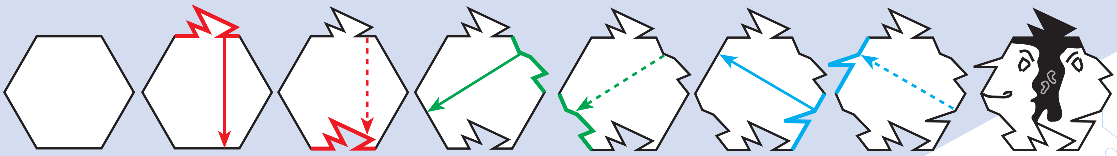
CREA UN MOSAICO

El pintor holándes M. C. Escher (1898-1972) impresionado por los mosaicos de la Alhambra de Granada creó una nueva forma de generar mosaicos.

Partiendo de una figura geométrica que rellena el plano, a la que va aplicando sucesivas deformaciones, llega a una construcción de un motivo que rellena el plano.



El mosaico se genera después mediante giros, simetrías y traslaciones.



En las figuras se muestra una forma de creación de estos mosaicos:

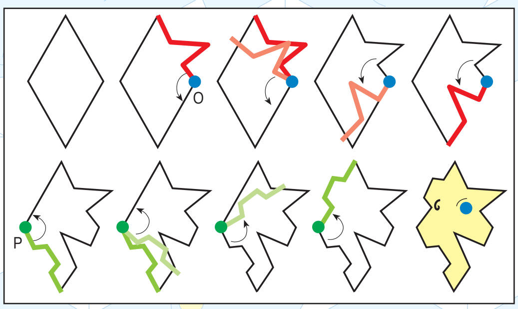
- Partimos de un hexágono regular
- Deformamos un lado y aplicamos una traslación del lado deformado haciéndola coincidir con su lado paralelo
- Repetimos el procedimiento en las parejas de lados que queramos.
- Adornamos *la tesela* y creamos el mosaico.

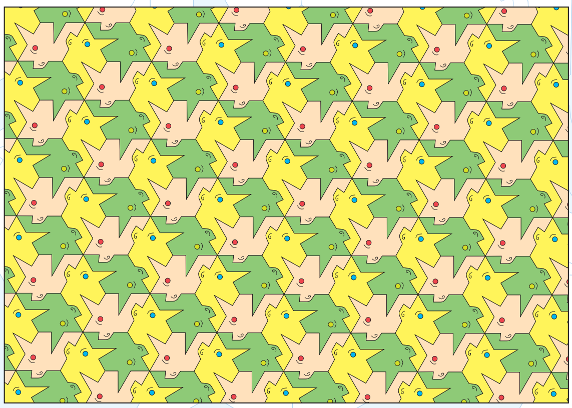


Crea

Ahora crea tu mosaico en esta trama, siguiendo los pasos anteriores

En este ejemplo aplicamos giros en lugar de traslaciones. Fíjate en las secuencias siguientes e intenta crear tu propio mosaico por este procedimiento.





SIMETRÍAS



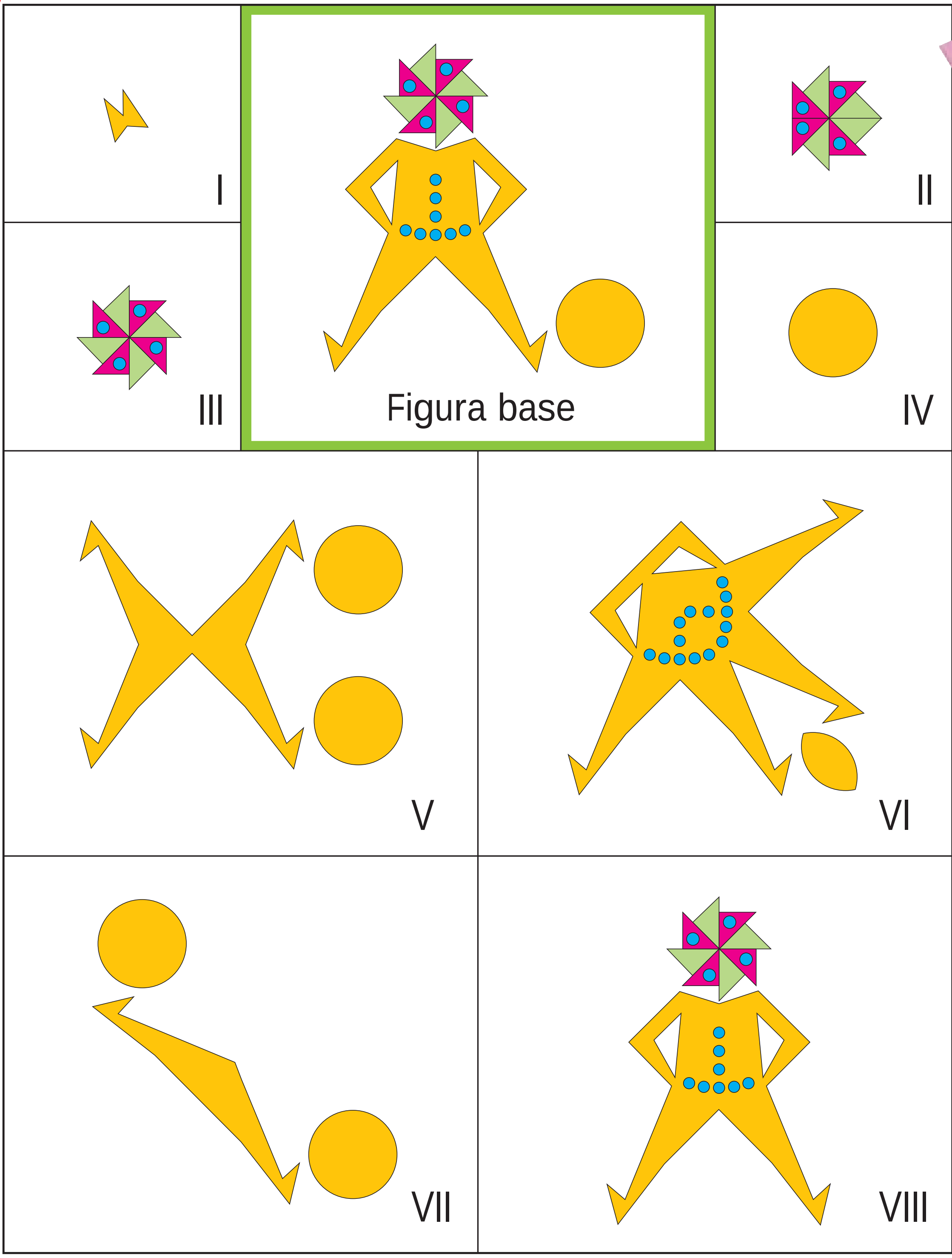
Los espejos hacen de eje de simetría de las figuras que se reflejan en ellos.

Indaga

¿Dónde colocarías un espejo en la figura base para obtener las figuras de la I a la VIII? ¿Se pueden obtener todas las figuras? ¿Cuáles no?

Si quieres, comprueba con un espejo si has acertado o no.





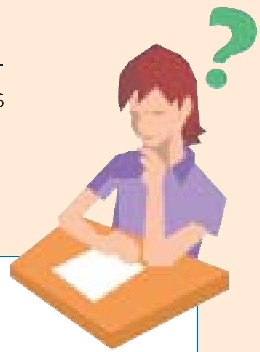
Empaquetando cilindros

Un problema habitual es el empaquetamiento de latas de conserva, botes de bebidas u otros objetos cilíndricos, en cajas cuya forma es un paralelepípedo rectangular. Al empaquetarlos se intenta que el espacio sobrante sea el menor posible.

¿Qué disposición permite empaquetar el mayor número de objetos?

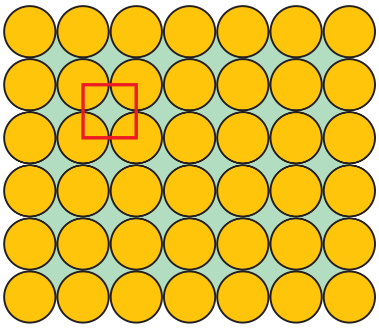
¿Cómo colocarlos dentro de la caja para que el espacio que se pierda sea el menor posible?

Los objetos que se van a guardar son del mismo tipo, de manera que si damos un corte transversal a los cilindros, obtendremos círculos del mismo diámetro. De este modo podemos reducir el problema a la colocación de círculos dentro de un rectángulo.

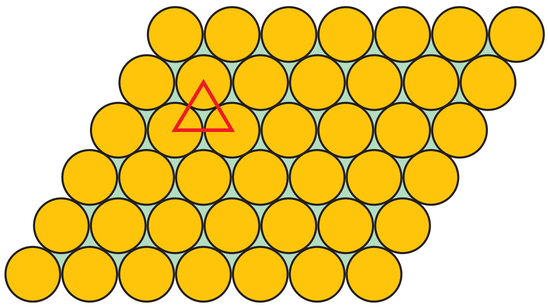


Observa y calcula

Observa que la forma de disponer círculos sobre el plano se puede hacer de dos maneras:

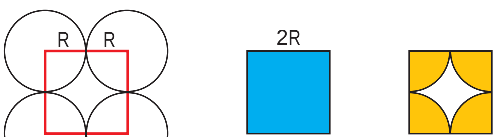


Disposición cuadrada



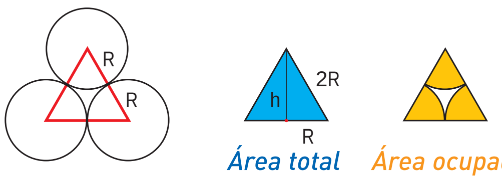
Disposición hexagonal o triangular.

¿Qué disposición te parece mejor? Para comprobarlo vas a calcular la densidad de empaquetamiento de cada una de las disposiciones.



Área total *Área ocupada*

DENSIDAD DE EMPAQUETAMIENTO = *Área ocupada* / *Área total* = ______ / ______ = ______



Área total *Área ocupada*

DENSIDAD DE EMPAQUETAMIENTO = *Área ocupada* / *Área total* = ______ / ______ = ______

Compruébalo

Material: 60 fichas iguales.

¿Seguirán siendo las cosas iguales si en lugar de considerar todo el plano elegimos un determinado rectángulo para empaquetar círculos?

Compruébalo colocando fichas de las dos maneras en distintos rectángulos.

Poliedros que rellenan





A principios de los años ochenta, surgió el tetrapack, un envase como el de la foto. Su construcción es muy sencilla, basta con doblar las bases de un cilindro como en la figura.
Sólo duró unos meses. ¿Sabrías indicar alguna de las causas de su breve vida?
¿Es posible apilar estos envases fácilmente?
¿Podríamos llenar un cajón con ellos sin dejar huecos?

Investiga



Vamos a investigar con tetraedros (que son como tetrapacks de triángulos equiláteros) para verificarlo.

Material:
plantilla para construir un tetraedro o polígonos troquelados.

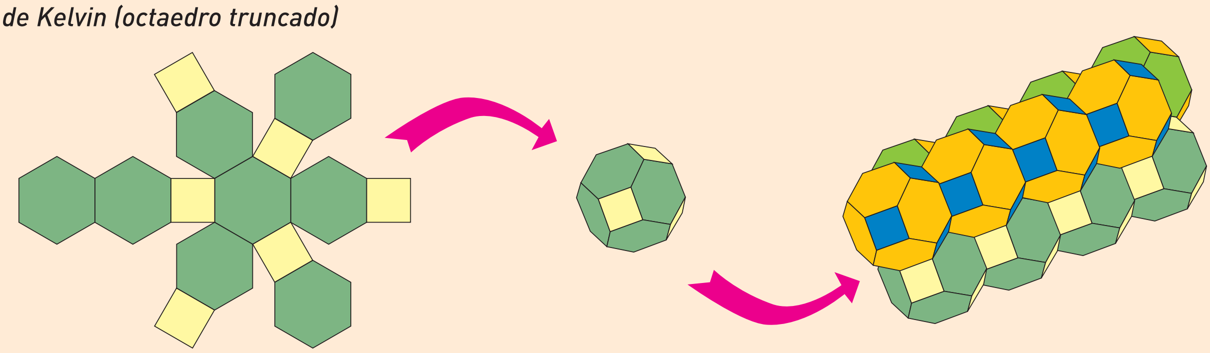
1. Construye un tetraedro regular (en papel, con polígonos troquelados).
2. Con algunos tetraedros de tus compañeros (es importante que sean del mismo tamaño) intentad juntarlos de tal manera que no queden huecos. ¿Es posible?

Podréis comprobar que parece que sí rellenan el espacio pero que queda un pequeño hueco entre ellos.

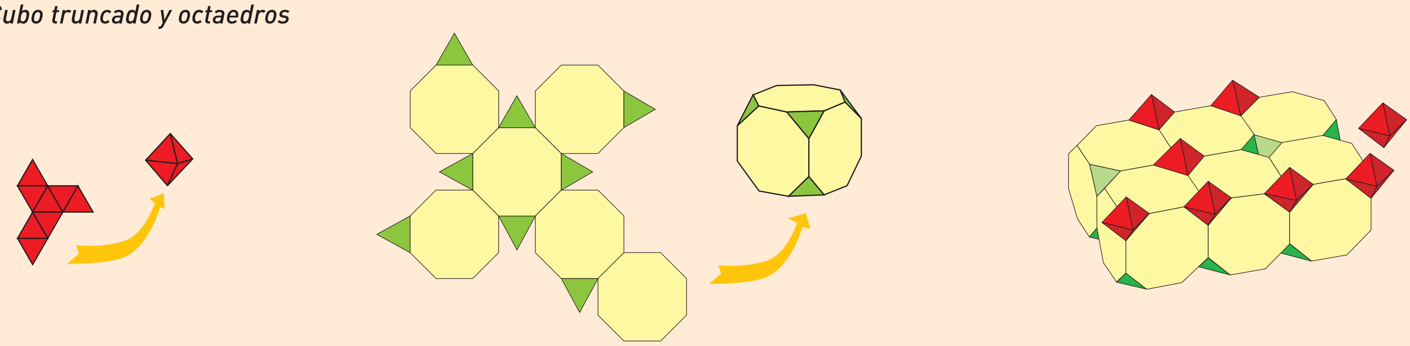
De los 5 poliedros regulares sólo el cubo es capaz de rellenar el espacio sin dejar huecos, aunque también lo podemos conseguir combinando poliedros regulares de distintos tipos.

Hay hasta 12 formas diferentes de rellenar el espacio combinando poliedros regulares y poliedros arquimedianos. Las siguientes imágenes te muestran algunas de estas formas:

Poliedro de Kelvin (octaedro truncado)



Cubo truncado y octaedros

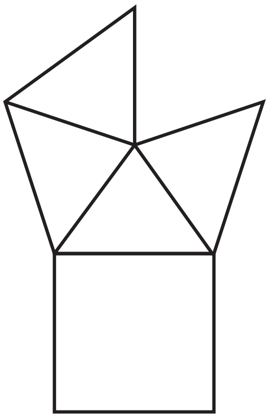


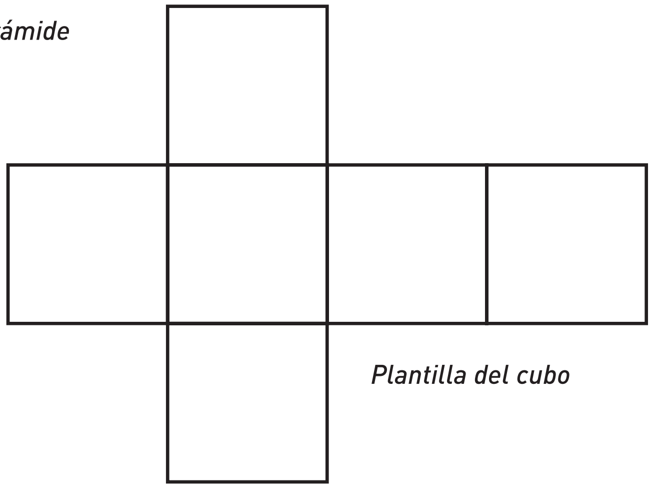
el ESPACIO



Construye

Desarrollo de cada pirámide





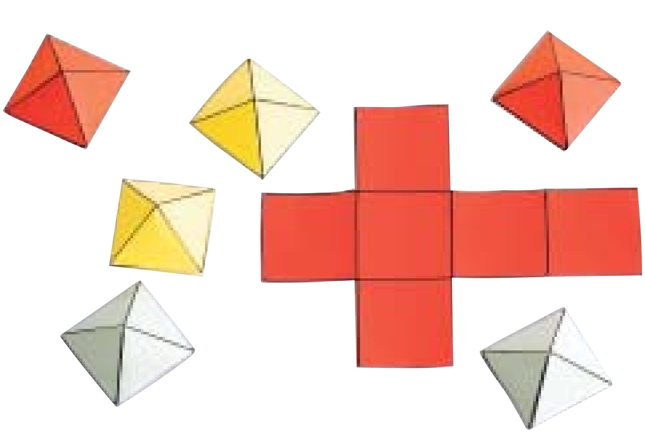
Plantilla del cubo

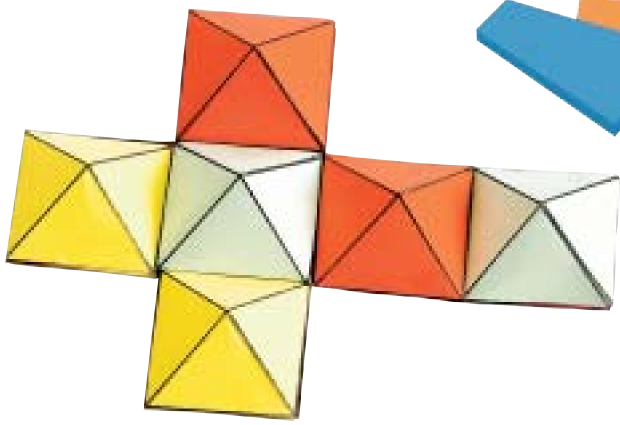
Uno de los pocos poliedros no regulares que rellenan el espacio es el rombododecaedro. Se obtiene de la división de un cubo en 6 pirámides de base cuadrada. Cada base es una de las 6 caras del cubo.



Recorta y construye las 6 pirámides iguales. Pégalas sobre las caras del desarrollo plano del cubo y cierra la figura dejando los vértices de las pirámides hacia fuera. Has construido un rombo dodecaedro. Observa que sus caras son rombos.







Con tu pirámide y con las de tus compañeros comprobaréis que es una figura que rellena el espacio.



Si lo cierras hacia afuera obtienes el rombododecaedro

Si lo cierras hacia dentro rellenas un cubo



Las abejas fabrican, para meter la miel, unas celdillas de cera que son prismas hexagonales. Para que no se muevan, cierran por uno de sus extremos estos prismas con la mitad de un rombododecaedro.

DIAGRAMAS de VORONOI

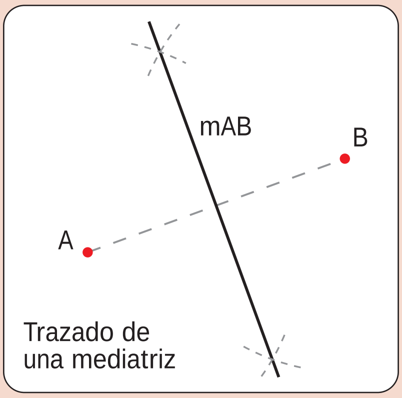
La distribución en una ciudad de centros de interés social (como por ejemplo: ubicación de mercados, mesas electorales, etc.) son problemas que se resuelven con unos diagramas llamados de Voronoi.

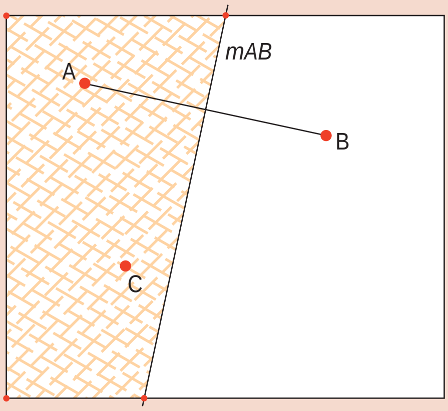
En una ciudad existen 5 colegios. ¿A qué escuela deben ir los alumnos de los distintos barrios de la ciudad si lo que se desea es que vayan al colegio más próximo a su vivienda?

Para resolver este problema, vamos a considerar primero un caso más sencillo, con solo 3 puntos.

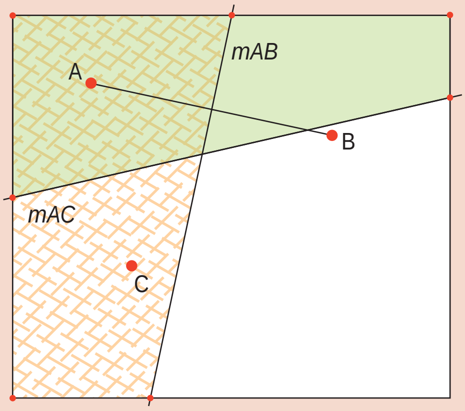
Consideremos 3 puntos en los planos A, B y C. La región de Voronoi de uno de ellos es la parte del plano más cercana a él que a los demás puntos de partida.

Calculamos la región de Voronoi correspondiente al punto A.

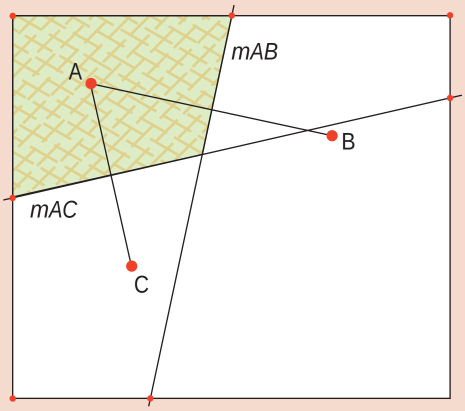




Trazamos la mediatriz del segmento AB. Nos quedamos con el semiplano de los puntos más cercanos a A que a B (color marrón claro).



Trazamos la mediatriz del segmento AC. Nos quedamos con el semiplano de los puntos más cercanos a A que a C (color verde).

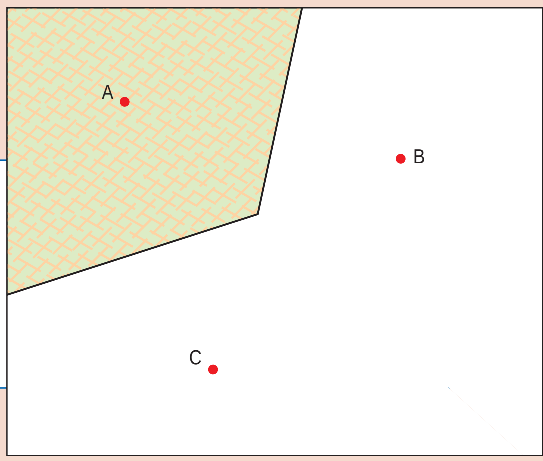


La intersección de los 2 semiplanos seleccionados es la región de Voronoi del punto A.

Completa

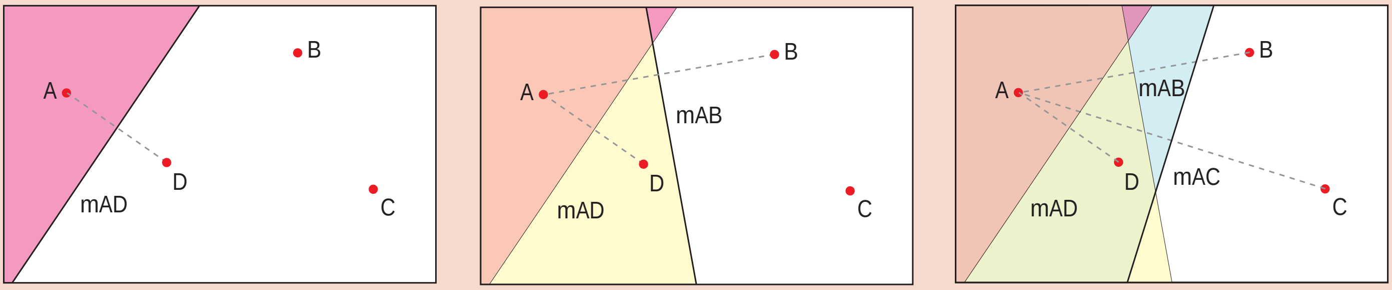
Repite el proceso con los puntos B y C y obtendrás las tres regiones de Voronoi.

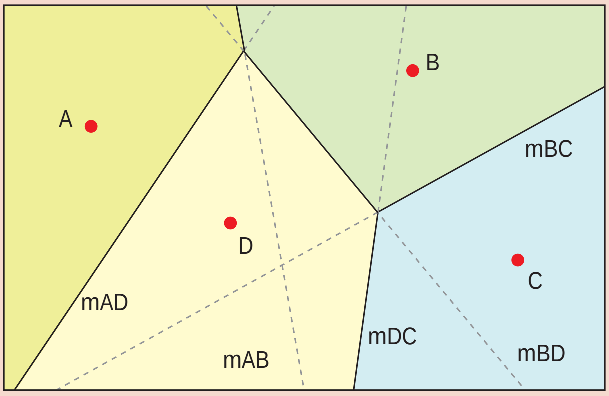




Con 4 puntos A, B, C y D.

Tomamos un punto, por ejemplo el A. Al trazar la mediatriz con D nos quedamos con el semiplano de los puntos que están más cerca de A que de D (verde claro). Trazamos ahora la mediatriz del segmento AB y nos quedamos con el semiplano de los puntos más cercanos a A que a B (amarillo). Hacemos lo mismo con A y C y nos quedamos con el semiplano azul. La intersección de todos estos semiplanos es la región de Voronoi del punto A.





Haz lo mismo con los puntos B, C y D, para obtener todas las regiones.

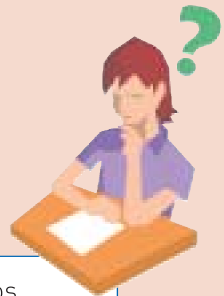
Regiones de Voronoi

Punto A ...... zona verde claro

Punto B ...... zona verde

Punto C ...... zona azul

Punto D ..... zona amarillo



Resuelve

Resuelve el problema planteado al principio suponiendo que las letras representan los 5 colegios.



GRAFOS

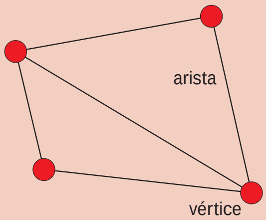


Miguel tiene que pintar las medianas de las carreteras que unen las 6 casas del dibujo. Antes de empezar, analiza el plano para ver en qué orden debe seguir el trabajo. ¿Podrá pintar todas las carreteras pasando únicamente una vez por cada una de ellas? ¿Dónde debe empezar? ¿Dónde terminará?

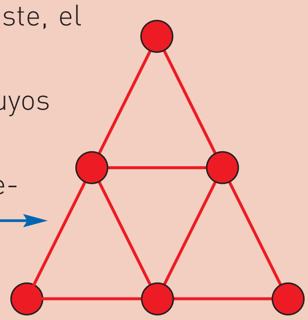


Euler, en el siglo XVIII, resolvió un problema muy parecido a este, el de los puentes de Königsberg, mediante la teoría de grafos.

Un grafo es un conjunto de puntos (vértices), algunos de cuyos pares están unidos por una línea (arista).



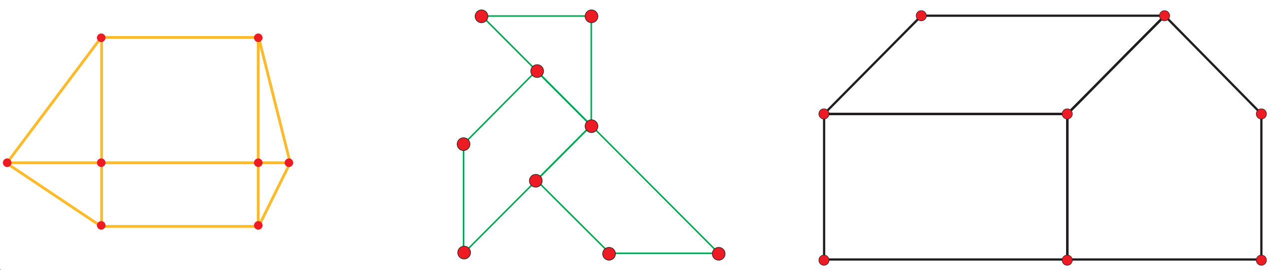
El problema de Miguel se puede representar mediante este grafo: →



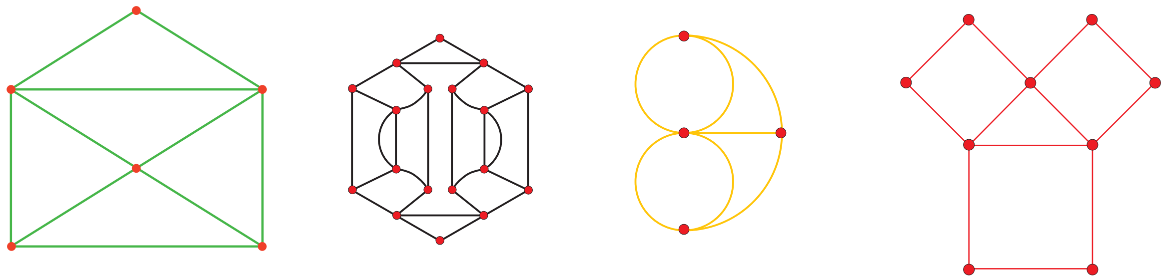
Los vértices representan las casas, y las aristas las carreteras. El problema equivale a responder a la siguiente pregunta: ¿puedes dibujar el grafo sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por el mismo trazo?

Investiga y completa

Investígalo con estos grafos:







Completa:

1. Si a todos los VÉRTICES les llega un número ❑ par / ❑ impar de aristas, el problema tiene solución y podemos empezar y terminar en el vértice que queramos. Estos grafos se llaman **EULERIANOS**.

2. Si hay DOS VÉRTICES a los que les llega un número ❑ par / ❑ impar de aristas, el problema también tiene solución, pero debemos empezar en un vértice *impar* y terminar en el otro impar. Estos grafos se llaman **SEMIEULERIANOS**.

3. **RECORRIDOS IMPOSIBLES:** los que tienen más de dos vértices ❑ par / ❑ impar.

Multiplica con los dedos



La mano del hombre no solo ha servido para contar, sino también para calcular. La tradición de multiplicar con los dedos es muy antigua; todavía podemos encontrar huellas en India, Irak, Siria, África del Norte, etc.

Observa algunos ejemplos. En todos los casos se empieza con los 10 dedos de las manos levantados.

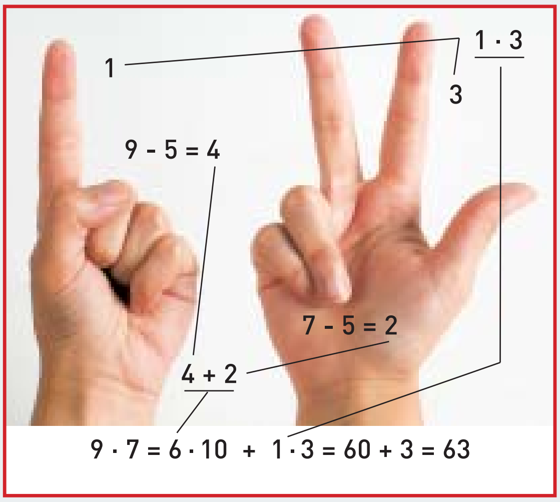
1. Multiplicación de números comprendidos entre 5 y 10.

Por ejemplo: 9 · 7

a) Resta 5 al primer número: **9** – 5 = 4. Dobla 4 dedos de una mano. Queda 1 dedo levantado.

b) Resta 5 al segundo número: **7** – 5 = 2. Dobla 2 dedos de la otra mano. Quedan levantados 3 dedos.

c) **Suma** los dedos **doblados**: 4 + 2 = 6 y lo multiplicas por 10. Suma a dicha cantidad el producto de los dedos levantados de las manos: 1 · 3 = 3. Resultado: 63.



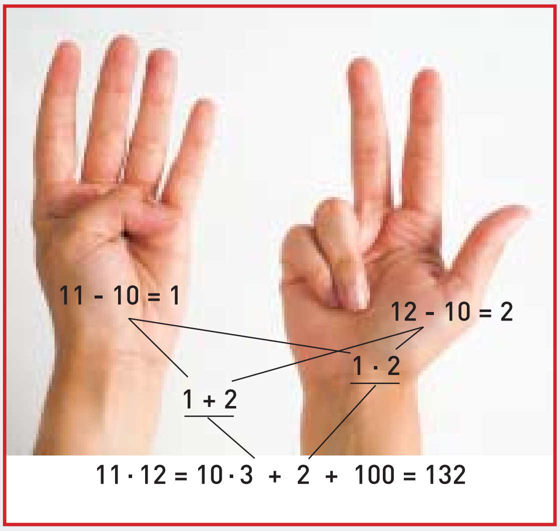
2. Multiplicación de números comprendidos entre 10 y 15.

Por ejemplo: 11 · 12

a) Resta 10 al primer número: **11** – 10 = 1. Dobla 1 dedo de una mano.

b) Resta 10 al segundo número: **12** – 10 = 2. Dobla 2 dedos de la otra mano.

c) **Suma** los dedos **doblados**: 1 + 2 = 3 y lo multiplicas por 10. Súmale el **producto** de los dedos **doblados** de las manos: 1 · 2 = 2; y por último suma 100 (10 · 10). Resultado: 132.



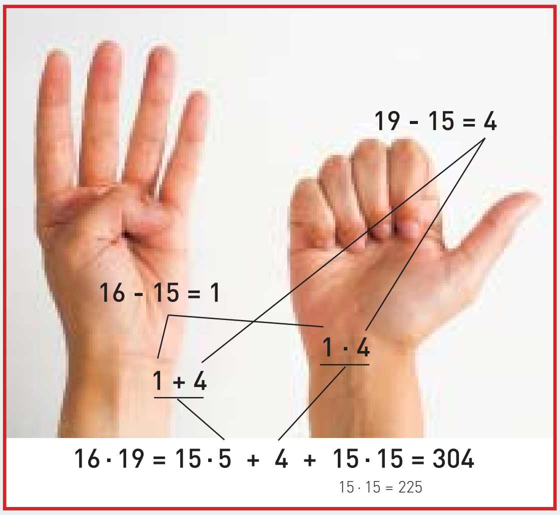
3. Multiplicación de números comprendidos entre 15 y 20.

Por ejemplo: 16 · 19

a) Resta 15 al primer número: **16** – 15 = 1. Dobla 1 dedo de una mano.

b) Resta 15 al segundo número: **19** – 15 = 4. Dobla 4 dedos de la otra mano.

c) **Suma** los dedos **doblados**: 1 + 4 = 5 y lo multiplicas por 15. Súmale el **producto** de los dedos **doblados** de las manos: 1 · 4 = 4; y por último suma 225 (15 · 15). Resultado = 304.

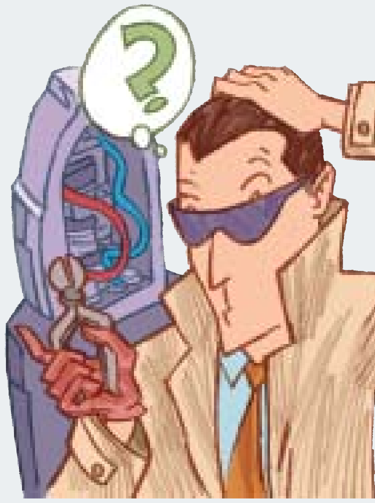


Practica e investiga

Ahora puedes **practicar** realizando los productos que desees. Como ves, estas técnicas implican saberse de memoria los cuadrados respectivos de 10, 15... ¿Sabrías multiplicar por este método números entre 20 y 25? **Investiga** la justificación matemática.

el ESPÍA y la CLAVE RSA

La criptografía –la ciencia de la codificación– es una herramienta fundamental para la seguridad en las trasmisiones de todo tipo. Uno de los métodos más seguros es la clave pública RSA (iniciales de Rivest, Shamir y Adelman, sus creadores).



Un espía tiene por misión desactivar un artefacto muy peligroso. Para ello tiene que desconectar uno y solo uno de los cables del artefacto. Pero es muy despistado y no recuerda el color del cable en cuestión. Manda un mensaje al cuartel general preguntando el color y les pide que le envíen la respuesta codificada utilizando el método de clave pública RSA. Para ello tiene que mandar una clave:

Elabora la clave

Elige dos números primos, por ejemplo p y q.	$p = 3$ y $q = 11$
Calcula m = m.c.m (p-1, q-1).	m.c.m. (2,10) = 10 $m = 10$
Busca un número r que cumpla la condición de que r y m sean primos entre sí.	$r = 3$ (3 y 10 son primos entre sí)
Envía el número $p \cdot q$ y el número r. Con estos dos números cualquier persona puede cifrar un mensaje pero solo tú lo puedes descifrar.	$p \cdot q = 33$ $r = 3$

Descodifica el mensaje

Material:
calculadora

En un par de minutos recibe el siguiente mensaje en el móvil que le deja anonadado:

26, 28, 14, 1, 31, 26, 28, 4, 26, 31, 3, 31, 9

Cada número corresponde a una letra. Si no estuviera codificado, el 1 sería la letra A, el 2 la letra B, etc... (¡OJO! la Ñ no forma parte del alfabeto internacional). ¿Podrías ayudar al espía a descifrar el mensaje?

Busca el número s (comprendido entre 1 y m para el cual el producto $r \cdot s$ da de resto 1 al dividirlo por m. Sólo hay un número que cumple esta condición.	$r = 3$; $m = 10$ Resto $(3 \cdot s, 10) = 1$
Eleva cada número del mensaje al exponente s y calcula el resto de la división de esa potencia entre $p \cdot q$.	$26^s / 33$. Calculando sale: Resto $(26^s, 33) = 5$
El resto de esa división es el número sin codificar que deberás sustituir por la letra correspondiente del alfabeto.	Al 26 del código le corresponde el 5 → E

Acaba de descifrar el mensaje.

Codifica un mensaje

Utilizando los números p, q, r anteriores.

Se sustituye cada letra por el número equivalente del alfabeto. A → 1, B → 2, ...	A la letra *D* le correspondería el 4 (sin código)
Calcula ese número elevado a r y busca el resto de la división de esa potencia entre el resultado del producto $p \cdot q$. En el mensaje, sustituye la letra por ese resto codificado.	$4^r = 4^3 = 64$ Resto (64, 33) = 31

En la práctica, los números primos p y q deben ser muy grandes (100 cifras) lo que hace que sea imposible deducir el valor de estos dos números conociendo sólo su producto.

CURVAS de ANCHURA CONSTANTE

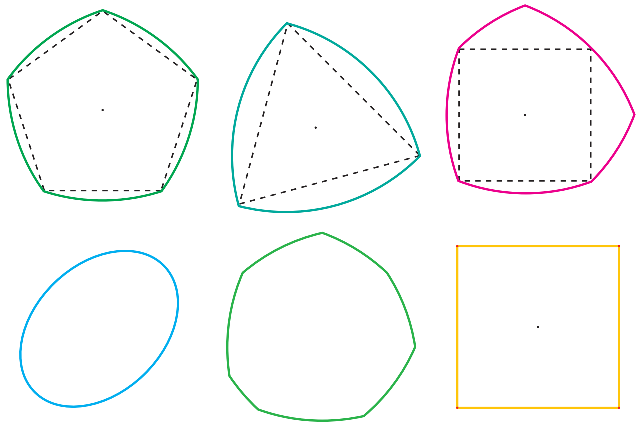
En 1924, el ingeniero alemán Felix Wankel diseñó un motor rotativo en el que los pistones eran sustituidos por un rotor triangular, un Triángulo de Reuleaux, curva de anchura constante estudiada medio siglo antes por el ingeniero y matemático Franz Reuleaux.

Construye

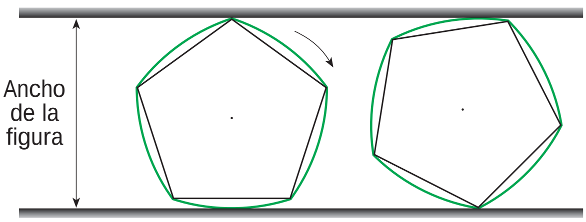
Material:
tijeras y compás.

1. Recorta las siguientes figuras.





2. Encaja la primera figura entre dos líneas paralelas. Gírala. ¿Qué sucede? ¿Desborda la figura alguna de las líneas?

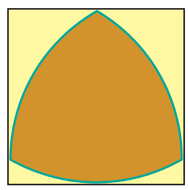


A las figuras que, como esta, miden lo mismo en cualquier dirección se las llama de anchura constante.

3. Comprueba si las restantes figuras son de anchura constante.

Con un hilo mide el perímetro de las figuras encontradas con el mismo ancho constante. ¿Qué observas?

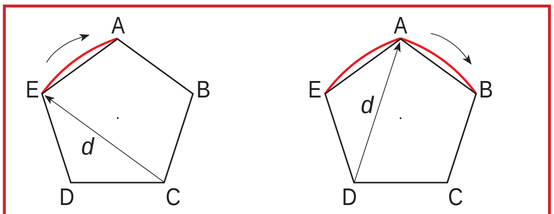
Existen muchas curvas de anchura constante. La más conocida, además de la circunferencia, es el triángulo de Reuleaux, que se construye a partir de un triángulo equilátero.



Triángulo de Reuleaux

4. Termina de construir el pentágono de Reuleaux:

5. ¿Podrías construir el heptágono de Reuleaux?



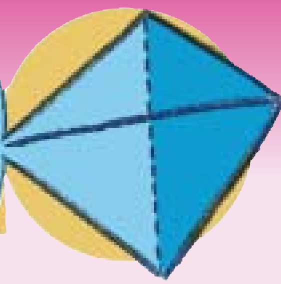
Trazamos el arco EA de centro C y radio *d*

Trazamos el arco AB de centro D y radio *d*. Completa la construcción





La rigidez del poliedro



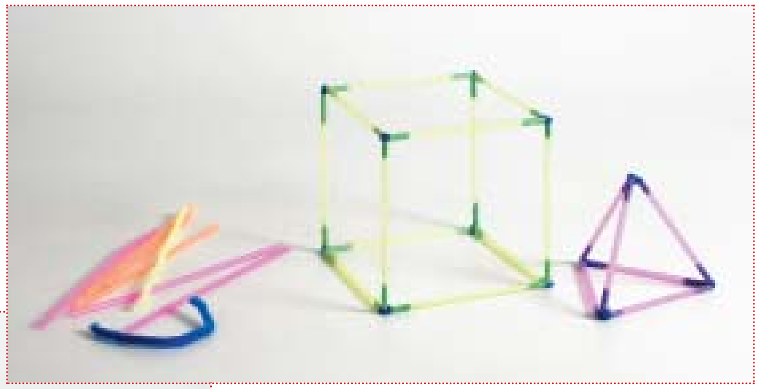
En la construcción de muchas estructuras metálicas está presente una forma geométrica muy habitual: el triángulo. Lo podemos ver en los andamios, en las bóvedas metálicas, en la torre Eiffel, en los techos de la estación de Atocha... ¿Qué hace que este polígono sea de uso tan corriente? ¿Tienen alguna peculiaridad las construcciones en las que se usa?

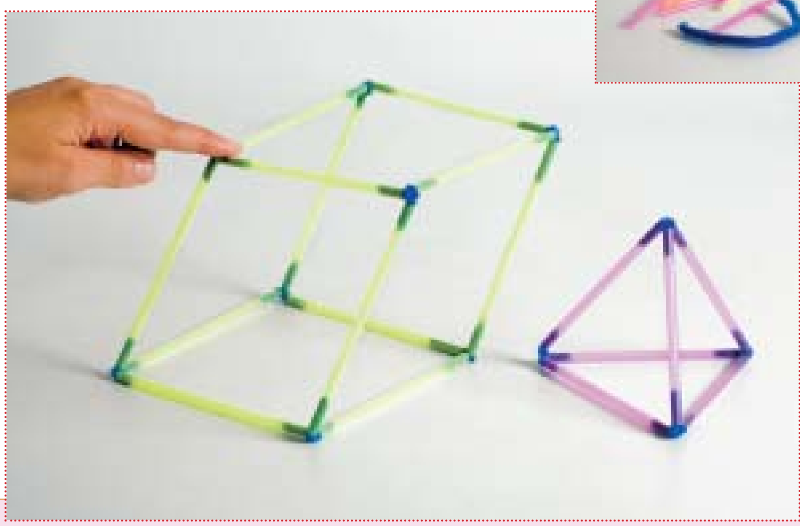
Las pajitas para beber refrescos y los limpia pipas son materiales muy útiles para construir poliedros. A la hora de construirlos nos encontramos con el problema de que algunos poliedros se deforman. Veamos cómo resolver este problema.

Construye

Material:
pajitas de refrescos, limpia pipas.

1. Construye, con el material, un tetraedro y un cubo. Para ello, corta las pajitas que necesites a igual longitud. Los limpia pipas los vas a utilizar para unir los extremos de las pajitas formando los vértices. Córtalos en trozos de 2 o 3 cm de longitud, dóblalos y colócalos como se ve en la fotografía (caben dos trocitos en cada extremo de las pajitas).





2. Coloca el tetraedro y el cubo sobre una mesa. Intenta aplastarlos suavemente con la mano. ¿Cuál de estas dos figuras se ha deformado?

Investiga



3. Para hacer rígido el cubo deberás colocarle diagonales.

Coge varias pajitas que no estén cortadas y utilízalas para poner diagonales a tu cubo hasta que se quede rígido. Intenta utilizar el menor número posible de diagonales.

4. Investiga si el menor número de diagonales que se necesita para hacer rígida una figura depende del número de aristas y vértices.

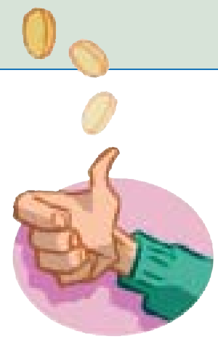
¿Suerte o Decisión Acertada?

El azar es uno de los conceptos más arraigados en todas las culturas. El mundo del azar no es un mundo sin ley. Aunque el resultado de una situación concreta sea impredecible, al menos podemos cuantificar la esperanza de que aparezca.

Os proponemos un juego para 3 jugadores.

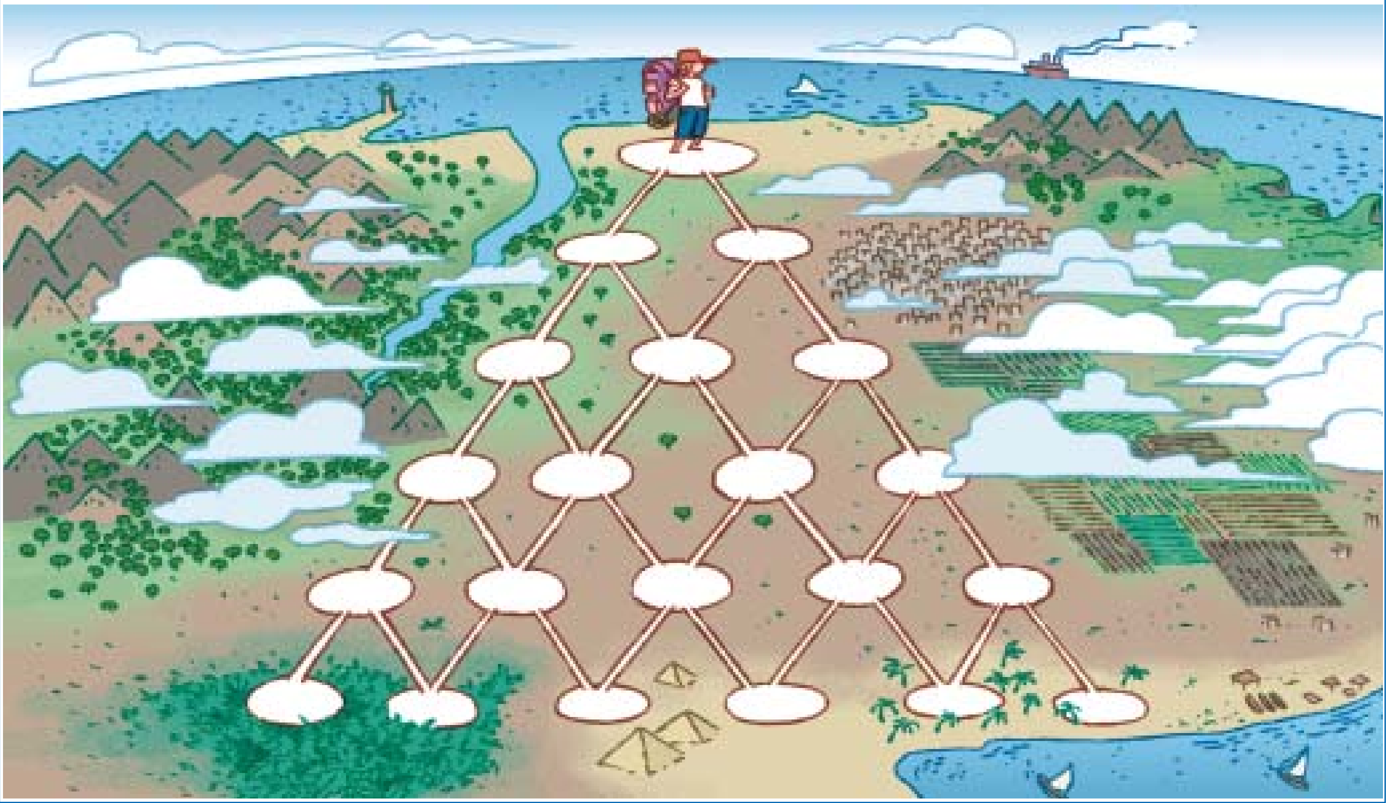
Material:
fichas de colores,
1 moneda

Juega

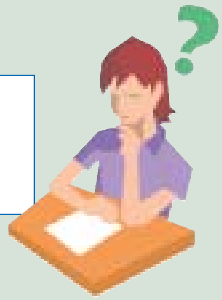


Reglas del juego:

- Cada jugador elige un color para sus fichas y 2 casillas de la meta. En cada casilla coloca una ficha.
- En la salida cada jugador sitúa otra ficha de su color.
- Por turno, cada jugador tira la moneda. Si sale cara, hace avanzar su ficha que está en la salida un lugar hacia la izquierda; si sale cruz, un lugar hacia la derecha.
- El jugador que primero llega a una de sus casillas en la meta, gana un punto y se termina esa partida.
- Gana el que tenga más puntos después de 5 partidas.



Investiga

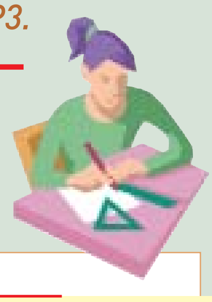


Después de jugar varias veces, contestad a las siguientes preguntas:

1. ¿Es imprevisible el resultado del juego? ¿Depende solo del azar?
2. ¿Qué casillas elegiríais para tener más posibilidades de ganar?



Una marca de refrescos quiere promocionar un nuevo producto. Con este fin incluye en cada paquete de 6 latas, la M, la P o el 3 –de la sigla MP3–. Si se consigue formar esa sigla, se entra en un sorteo para recibir un reproductor MP3.



Por término medio, ¿cuántos paquetes de 6 latas crees que habrá que comprar para poder entrar en el sorteo?

Juega y gana

Vamos a comprobar experimentalmente tu conjetura. Para ello, simula esta situación de la siguiente manera:

Material: una "ruleta" de papel, un lápiz y un clip.



1. Sitúa un clip sobre la ruleta sujetándolo con un lápiz como indica la fotografía.
2. Cada giro aleatorio del clip representa la compra de un paquete de latas y el sector al que apunta, la letra o el dígito que hay en el paquete.
3. Haz girar el clip tantas veces como sea necesario hasta obtener la abreviatura MP3.
4. Repite la simulación 20 veces y ve anotando los resultados en la tabla.

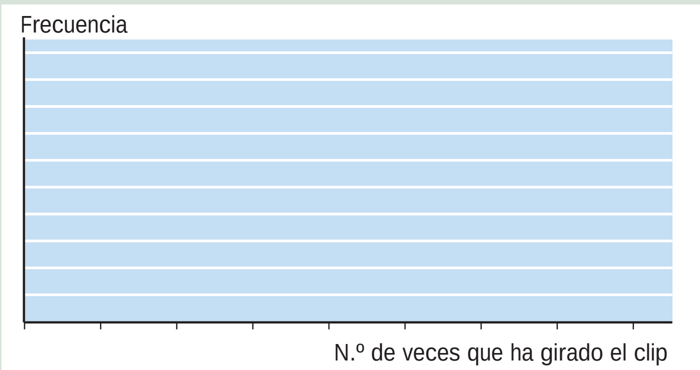
TUS GIROS

Nº de veces que he girado el clip hasta conseguir MP3	Frecuencia
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

5. Puesta en común de toda la clase. Anota en esta tabla los resultados de toda la clase.

LOS DE LA CLASE

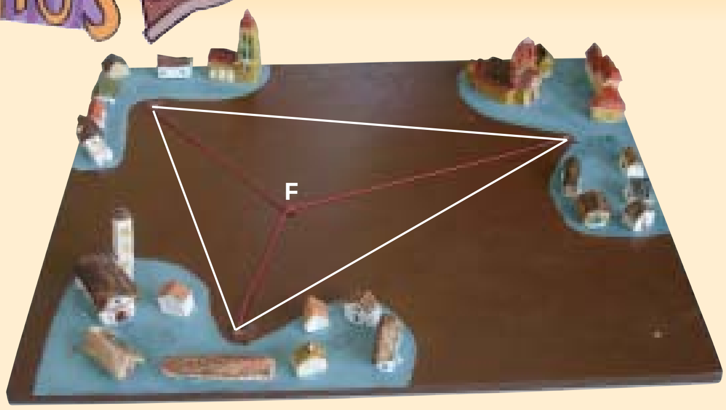
Nº de veces que se ha girado el clip hasta conseguir MP3	Frecuencia
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	



Calcula

6. Haz un diagrama de barras para representar los resultados y calcula el valor medio de veces que habéis hecho girar el clip para conseguir la abreviatura MP3.

Caminos mínimos

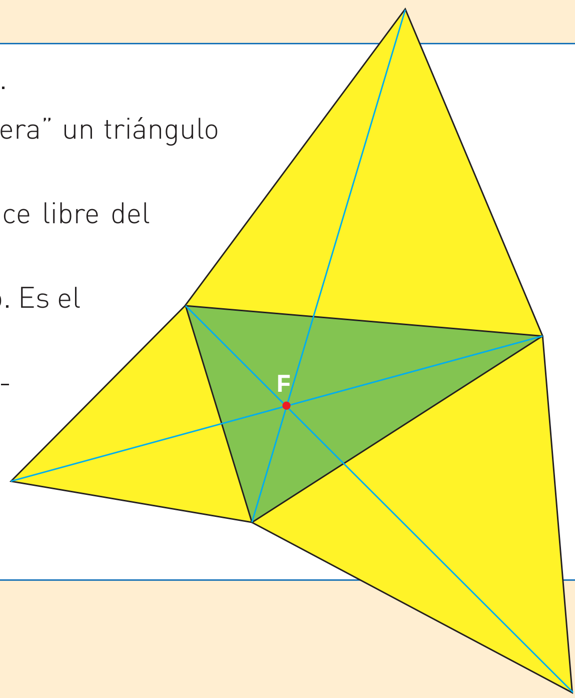


Un punto muy interesante de un triángulo es el punto de Fermat, el punto cuya suma de distancias a los vértices es mínima.

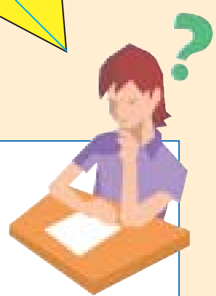
Tres pueblos vecinos quieren construir un hospital de tal forma que la suma del recorrido que hagan las ambulancias a los 3 pueblos sea mínima (las carreteras son rectas). ¿Dónde colocarías el hospital?

Dibuja

- Dibuja un triángulo con ángulos menores de 120º.
- Sobre cada lado del triángulo construye "hacia fuera" un triángulo equilátero.
- Une cada vértice del triángulo inicial con el vértice libre del triángulo equilátero opuesto.
- Los 3 segmentos anteriores se cortan en un punto. Es el punto de Fermat.
- Une el punto de Fermat con cada uno de los vértices. ¿Qué ángulo forman entre sí dichos segmentos?



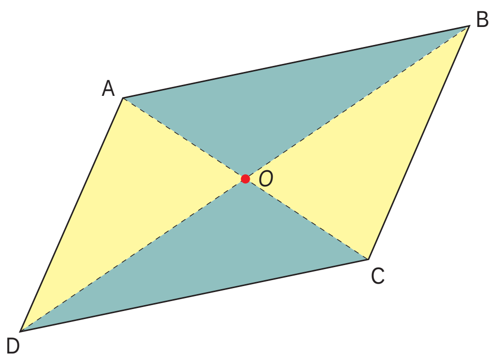
Ahora podrás resolver fácilmente el problema inicial.



Une cuatro pueblos

Si en vez de unir 3 pueblos mediante un camino mínimo, queremos unir 4, ¿cuál será este camino? Pongamos el ejemplo del siguiente paralelogramo:

El punto de intersección de sus diagonales es O.



Se forman 2 pares de triángulos: AOD con BOC y AOB con DOC.

Calcula el punto de Fermat de los triángulos coloreados de amarillo. Traza el camino que une A, B, C y D y los puntos de Fermat. ¿Es el camino buscado? ¿Qué ángulos forman los segmentos?

¿Cómo es el camino realizado de forma análoga al anterior con el par de triángulos coloreados de azul?

Este tipo de problemas matemáticos los resolvió a mediados del siglo XIX el físico belga Joseph Plateau mediante películas de jabón.



"Una araña situada sobre una cara de un cubo quiere cazar una mosca posada en la cara opuesta. ¿Qué camino deberá seguir la araña para recorrer la menor distancia posible y alcanzar a la mosca?".



Construye e investiga

1. Construye un cubo de cartulina y dibuja sobre él la mosca y la araña como indica el dibujo.
2. Dibuja sobre las caras del cubo el camino que debe seguir la araña para cazar a la mosca.
3. Comprueba si el camino que has dibujado es la menor distancia que puede recorrer la araña. Para ello:
   - Abre el cubo para obtener un desarrollo plano. El recorrido de la araña habrá quedado dibujado en él.
   - ¿Puedes dibujar otro recorrido que sea más corto?
4. Comprueba que el recorrido más corto es la línea recta.

Material:
tijeras, cartulina, pegamento, lápiz, regla y cinta celo.

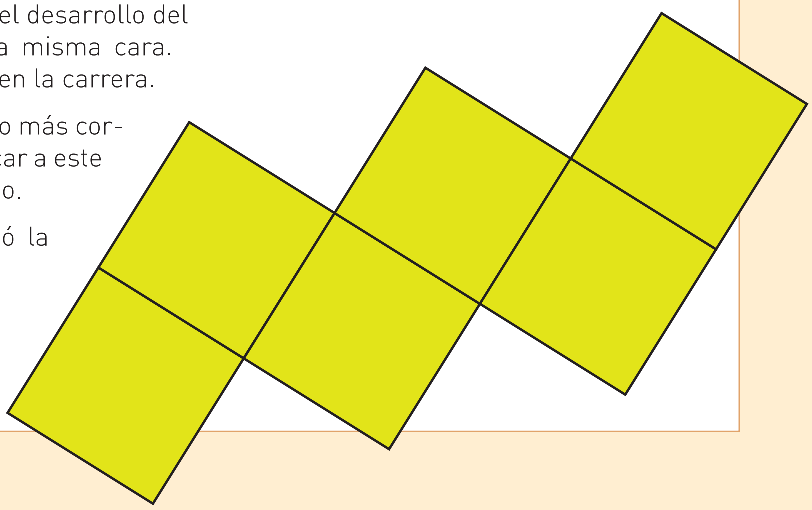


"Dos arañas deciden hacer una carrera sobre un cubo. Parten de la misma cara y tienen que volver a su posición inicial pasando por todas las caras del cubo. Ambas arañas se mueven a igual velocidad. ¿Qué camino deberán seguir para ganar la carrera?".

Construye e investiga

1. Vuelve a construir un cubo de cartulina utilizando el desarrollo del dibujo de la derecha. "Coloca" dos arañas en la misma cara. Dibuja los caminos que pueden seguir las arañas en la carrera.

   En la actividad anterior comprobaste que el camino más corto es la línea recta. Esta conclusión la puedes aplicar a este nuevo problema utilizando este desarrollo del cubo.
2. ¿Qué araña ha recorrido menor distancia y ganó la carrera?
3. Investiga si esto sucede cualquiera que sea el punto de partida de las dos arañas.



Demostraciones visuales

Las demostraciones son el corazón de las matemáticas. Se disfruta enormemente cuando se logran pero no todas tienen por qué ser abstractas y complejas. Las hay muy sencillas y elegantes, como estas que te mostramos a continuación.

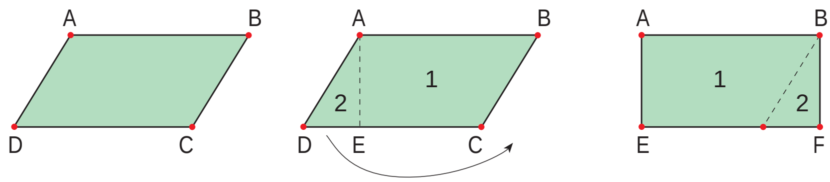
Material:
cartulina, tijeras, ojos...



Comprueba

1. *"El área de un paralelogramo es igual al área de un rectángulo de igual base y altura que el paralelogramo."*

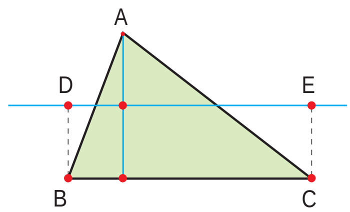
- Dibuja un paralelogramo como el de la figura y recórtalo con unas tijeras.
- Córtalo por la línea de puntos y traslada el triángulo obtenido al lado derecho del paralelogramo.



- El paralelogramo inicial y el rectángulo final tienen igual base e igual altura ¿Cómo son las áreas de estas dos figuras?

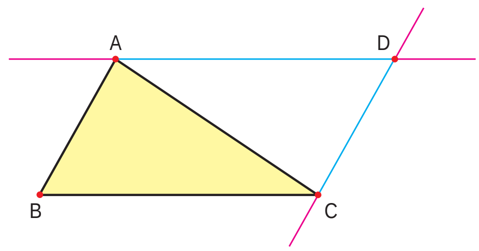
2.1. *"El área de un triángulo es igual al área de un rectángulo de igual base y altura la mitad de la del triángulo."*

- Observa el siguiente dibujo. La recta DE se ha trazado por el punto medio de la altura del triángulo ABC. Justifica que el área del triángulo ABC es igual al área del rectángulo DBCE.



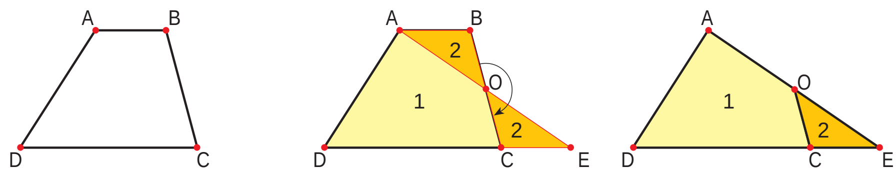
2.2. *"El área de un triángulo es igual a la mitad del área de un paralelogramo de igual base y altura que el triángulo."*

- Observa el siguiente dibujo y justifica que el área del triángulo ABC es la mitad del área del paralelogramo DBCE.



3. *"El área de un trapecio es igual al área de un triángulo de igual altura y base igual a la suma de las bases del trapecio."*

- Observa el siguiente dibujo y justifica que el área del trapecio ABCD es igual al área del triángulo ADE.

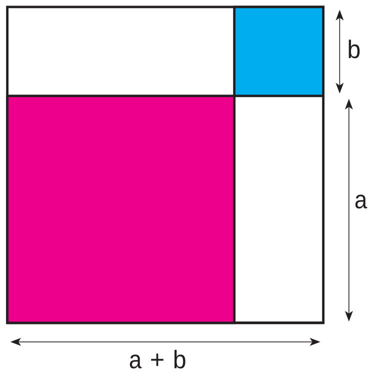


Álgebra & Geometría

¿Quién no ha tenido que "aprenderse de memoria" las llamadas "expresiones notables"? Por fortuna, podemos demostrarlas elegantemente con el álgebra... y con la geometría.

Cuadrado de una suma

Utiliza el dibujo para contestar a las preguntas:



1. El lado del **cuadrado grande** es ______ y por tanto su área es ______

2. Fíjate en las longitudes de los lados de cada pieza y calcula las áreas de las siguientes figuras:

Área del **cuadrado mediano** ______

Área del **cuadrado pequeño** ______

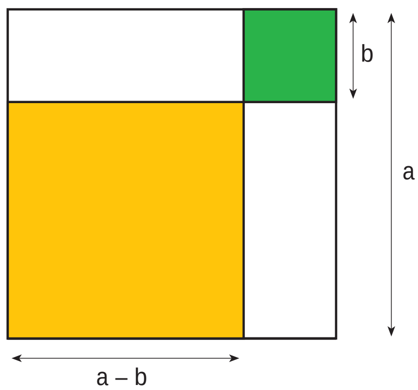
Área de cada **rectángulo (blanco)** ______

Expresa el área del cuadrado grande en función de las áreas de las otras piezas que lo componen:

$(a + b)^2 =$ ______

Suma por diferencia

Utiliza el dibujo para contestar a las preguntas:





1. Calcula:

Área del **cuadrado grande** ______

Área del **cuadrado mediano** ______

Área del **cuadrado pequeño** ______

Área de cada **rectángulo** ______

2. Dibuja el rectángulo que podrías formar juntando el **cuadrado mediano y los 2 rectángulos blancos**. Calcula las dimensiones de este nuevo rectángulo y su área.

Área = ______

3. El área del rectángulo que has dibujado es igual a la del cuadrado grande menos la del pequeño.

Completa la expresión.

$(a + b) \cdot (a - b) =$ ______

GUÍA RÁPIDA de la exposición

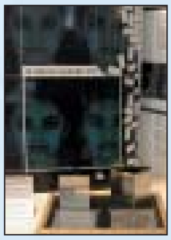
"¿Por qué las Matemáticas?" no es una exposición meramente contemplativa. No se trata sólo de mirar y ver; aunque también hay que hacerlo. La estructura y los contenidos en forma de paneles informativos, acompañados de materiales manipulables para que el visitante realice actividades matemáticas, propician un alto nivel de interactividad. Este es uno de los objetivos principales de la exposición: que el visitante mire, siente, toque, reflexione, piense, haga conjeturas, elabore estrategias... En definitiva, que actúe como un matemático.

Cada uno de los nueve temas está compuesto por paneles de carácter informativo acompañados de dos o tres experiencias y actividades. Estas, de carácter experimental y manipulativo, están relacionadas directa o indirectamente con los contenidos desarrollados en los paneles y constituyen atractivos retos matemáticos para el visitante.

Es necesario que el profesor informe a los alumnos, a grandes rasgos, de lo que se van a encontrar y de lo que tienen que hacer. La actitud de los alumnos ha de ser activa; no se trata sólo de extraer información de los paneles, se pretende que participen activamente realizando de forma ordenada las actividades que los acompañan.



1 / Leer la naturaleza



2 / Teselaciones y simetrías



3 / Llenar el espacio



4 / Unir mediante una línea



5 / ¿Por qué calcular?



6 / Construir



7 / Calculando

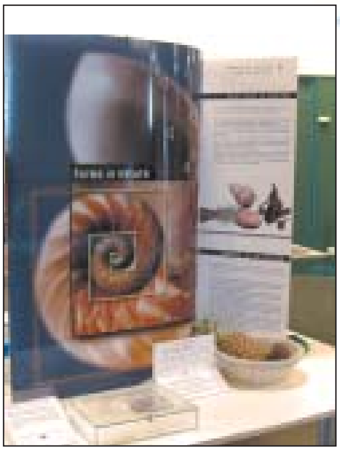


8 / Optimización



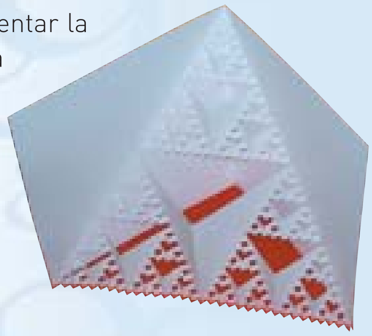
9 / Demostrando

1 / Leer la naturaleza



1-1 Formas en la naturaleza. ¿Por qué una burbuja de jabón que flota en el aire parece una esfera perfecta? ¿Por qué la naturaleza crea estructuras regulares y movimientos tan predecibles como los gravitatorios? Las matemáticas, los números, las ecuaciones diferenciales, nos permiten entender mejor fenómenos tan complejos como la vida en la Tierra o la estructura del Universo.

1-2 ¿Es el mundo fractal? ¿Cómo se puede representar la forma de un río serpenteante o de una costa escarpada? ¿Y la forma de una nube, una llama o una soldadura? Observa una hoja de helecho; está construida por repetición del mismo motivo a escalas cada vez más pequeñas. Este tipo de estructura, que aparece a menudo en la naturaleza, llevó a Benoît Mandelbrot desarrollar la Geometría Fractal.



1-3 ¡Todos en órbita! ¿Qué trayectorias siguen los planetas, los satélites naturales o artificiales de nuestro universo? Kepler demostró que estas órbitas son cónicas: elipses, parábolas, hipérbolas. Con el fin de seguir y dirigir los movimientos de muchos satélites artificiales que rodean la Tierra, se utilizan rosarios de antenas parabólicas.

2 / Teselaciones y simetrías



2-1 Técnicas de embaldosado. ¿Se puede recubrir un suelo con baldosas de cualquier forma sin dejar ningún hueco ni superponiéndolas? Los modelos de embaldosados que se repiten por translación son bien conocidos y sus simetrías internas permiten distinguir 17 tipos diferentes. Las teselaciones encuentran aplicaciones matemáticas, en cristalografía, teoría de códigos, física de partículas...

2-2 ¿Es simétrica la naturaleza? ¿Por qué la doble hélice del ADN siempre gira en la misma dirección? ¿Por qué un rostro humano y su reflejo en el espejo no son superponibles? Desde lo infinitamente pequeño hasta lo infinitamente grande, las simetrías aparecen en muchos modelos matemáticos. Sin embargo, la naturaleza raras veces presenta simetrías perfectas. Esto podría explicarse por el azar o por el propio carácter asimétrico de las fuerzas físicas.

2-3 ¿Dónde estoy? ¿Cuántos satélites necesitamos alrededor de la Tierra para saber donde estamos en todo momento? Tres son suficientes: miden su distancia al objeto que siguen (un cuarto satélite proporciona una corrección que mejora la precisión). El sistema GPS (Global Positioning System), el sistema ruso y pronto el sistema Europeo Galileo nos permiten saber dónde nos encontramos en todo momento.



3 / Llenar el espacio



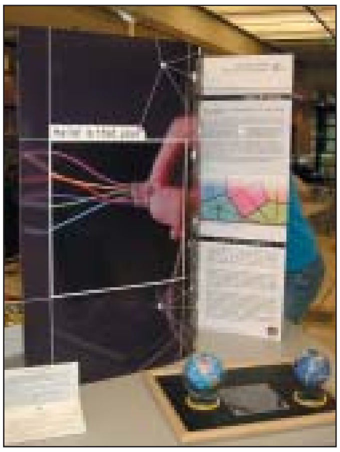
3-1 Apilar naranjas. ¿Cómo apilar naranjas ocupando el mínimo volumen posible? En los mostradores, las naranjas ocupan el 74% del espacio. Este problema de la vida cotidiana cuenta con aplicaciones que van desde el estudio de estructuras cristalinas a la teoría de códigos informáticos.

3-2 La esfera: del átomo a los cristales. La bóveda celeste, la Tierra, los átomos y las partículas elementales... ¿Por qué se utiliza a menudo la esfera (entera o en parte) para representar formas naturales? Si los átomos se representan mediante esferas, los cristales se consideran como pilas de átomos ordenadas, y casi siempre periódicas. Estos fenómenos son como elementos de un juego de billar infinito en tres dimensiones.



3-3 El apilamiento: un problema complejo. ¿Qué ocupa menos volumen, un kilo de café en grano o un kilo de café molido? Este pequeño problema pasa a ser importante cuando lo que se quiere es transportar toneladas de café... A la inversa, ¿de qué manera se pueden encontrar las mejores dimensiones para que los objetos ocupen un volumen determinado? Estos problemas, que dependen también del peso de los objetos, del coste del transporte, del gasto de almacenamiento, etc., aún no han sido resueltos.

4 / Unir mediante una línea



4-1 Puntos y líneas. Königsberg, 1736. ¿Es posible atravesar la ciudad cruzando cada uno de sus siete puentes una vez y sólo una vez? Es el inicio de la teoría de los grafos. La respuesta de Euler fue: depende de cuántos puntos existan en los que concurren un número impar de líneas.



4-2 ¡Cuatro colores bastan! ¿Cuántos colores necesitamos para colorear un mapa, de manera que dos países adyacentes tengan colores distintos? La teoría de grafos nos permite representar este problema y reducir el número de casos por estudiar.

4-3 ¿Dígame? En una red de comunicaciones locales ¿cómo se realizan tus llamadas telefónicas? En una ciudad, las centrales de la red telefónica están ubicadas de la mejor manera posible teniendo en cuenta la distribución irregular de las calles. Cada central tiene asignada una zona de proximidad de la llamada en forma de polígono conectado con los demás vecinos. Estas zonas forman una teselación de la ciudad, denominada mosaico de Voronoï. Si se conectan las centrales de zonas vecinas, se obtiene un grafo que representa los cables por los que viaja la llamada.

5 / ¿Por qué calcular?

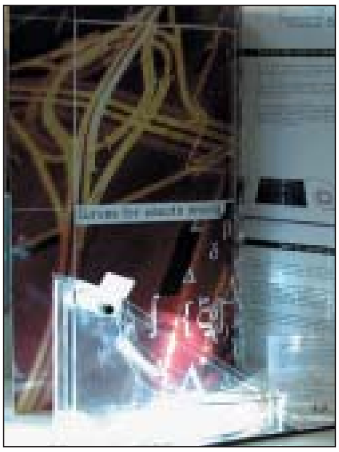


5-1 ¡Mi ordenador me ha engañado! ¿Qué números utilizamos en la vida cotidiana?¿Qué sucede si utilizamos una calculadora o un ordenador potente? El propio ordenador sólo utiliza números decimales con un número limitado de cifras. Tanto el contable como el ingeniero aeronáutico, deben controlar los errores de aproximación. En este ámbito, las herramientas informáticas no son del todo fiables.

5-2 El comercio electrónico ¿es seguro? Con el desarrollo de la web, la criptografía –la ciencia de la codificación- se ha transformado en una herramienta fundamental para la protección de los bancos y de las compras electrónicas. Los matemáticos, los físicos y los informáticos buscan nuevos métodos de codificación seguros, utilizando, en particular, las extrañas leyes de la física cuántica.

5-3 Restauración en Corfú. ¿Cómo recuperar imágenes digitales que se hayan dañado por problemas con la cámara de fotos, la transmisión o la recepción? Para ello, los matemáticos crean algoritmos de restauración de imágenes que se pueden ilustrar fácilmente mediante métodos cartográficos: la intensidad luminosa de cada píxel de la imagen se traduce por una "altura". La imagen se convierte en un mapa de relieve donde el ruido produce un relieve desigual; éste último se regulariza conservando las principales "líneas de nivel", y así se puede recuperar una imagen sin interferencias.

6 / Construir



6-1 Curvas para una conducción suave. En los accesos de las autopistas, ¿cómo se puede construir una vía que resulte más suave y segura para una conducción más eficaz?. El trazado que reduce las fuerzas centrífugas y permite unir suavemente una línea recta a una curva es la clotoide. Esta curva también se utiliza en líneas ferroviarias, líneas de metro, pistas de patinaje, etc.

6-2 La genialidad de los puentes. ¿Cómo construir puentes más largos y estables? Los primeros puentes utilizaban madera y piedra. Los puentes de hierro, acero y hormigón aparecieron más tarde. Surgieron nuevos problemas: el comportamiento dinámico de los puentes colgantes, la complejidad de gestionar la construcción de carreteras.

6-3 El motor rotatorio: ¡revolucionario! Los motores de pistón funcionan con un movimiento ascendente y descendente. En el caso de los motores rotatorios, la compresión y combustión se produce mediante rotación. La carcasa tiene forma de una epitrocoide, el rotor (que gira alrededor del eje) forma de triángulo de Reuleaux, y el espacio entre ambos se divide en tres cámaras de combustión. El volumen de gas en cada cámara varía con los movimientos del pistón.



7 / Calculando



7-1 ¿Estamos todos en la media? Si clasificamos los habitantes de una ciudad o un país, las hojas de un árbol..., de acuerdo con una característica (CI, peso, tamaño,...), cuanto más nos aproximemos a la media para cada criterio considerado, más individuos se encontrarán. Cuanto más nos alejemos de la media, menos individuos habrá. La representación gráfica de este hecho es la llamada curva de Gauss.

7-2 ¿Cómo pedir un préstamo? Deseamos solicitar un préstamo a nuestro banco. ¿Resulta más ventajoso solicitar un préstamo a tipo fijo o a tipo variable? Las matemáticas nos ayudan a comprender e interpretar los contratos financieros. Ignorarlas sería quedarse indefenso frente a las prácticas comerciales. La situación es idéntica, pero más complicada, en el caso de las inversiones.

7-3 ¿Ganar el Euromillón? Coja un avión con destino a Alemania (82 millones de habitantes). 1. Consiga una guía telefónica de ese país; 2. Suba al avión; 3. Cuando cruce la frontera, abra la guía; 4. Escoja un nombre al azar, anote el número de teléfono y guárdeselo en el bolsillo; 5. Póngase un paracaídas; 6. Abra la puerta del avión y... ¡salte!; 7. Tras tomar tierra, comience a andar en línea recta en una dirección al azar; 8. Pregunte a la primera persona con la que se encuentre cómo se llama y cuál es su número de teléfono; 9. Compárelos con el nombre y el número de teléfono anotados en su bolsillo; 10. ¡Vaya suerte ha tenido! ¡Son iguales! *Acaba usted de ganar el Euromillón* (la probabilidad de ganar el Euromillón es de una entre 76.275.360).

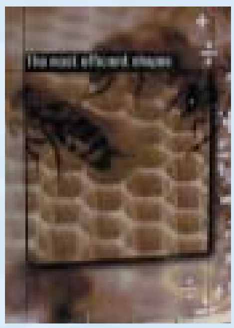
8 / Optimización



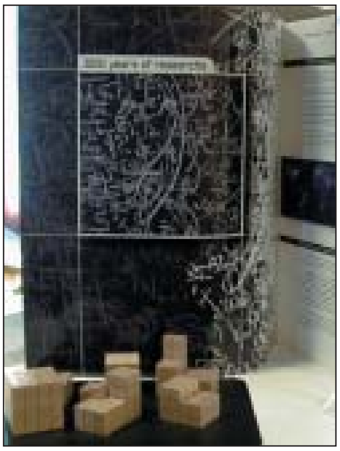
8-1 La naturaleza es ahorradora. Una pompa de jabón es esférica; los cuerpos estelares son prácticamente esféricos. ¿Por qué? A área constante, un círculo posee el perímetro más pequeño. A volumen constante, la esfera posee la superficie más pequeña. La naturaleza escoge el camino más fácil.

8-2 La Tierra bajo vigilancia. Después de haber elaborado proyecciones cartográficas adaptadas, por ejemplo, a la navegación, hoy tratamos de utilizar las imágenes tomadas por los satélites o por aviones para optimizar las labores de reconocimiento o la gestión de recursos. Y es que cada uno de los píxeles de una imagen está diciéndonos cómo es el terreno: rocoso, oceánico, fluvial, forestal, de cultivo... Combinando los datos suministrados por los instrumentos de medición, es posible obtener algoritmos de aprendizaje.

8-3 Las formas más eficientes. ¿Por qué se usa cada vez más la estructura de panal de abejas? ¿Acaso porque las abejas han encontrado una solución óptima? Los materiales diseñados a partir de la estructura de panal poseen propiedades llenas de ventajas, como ser livianas, fuertes y rígidas. Tales formas se utilizan en la construcción del Airbus A380, de los trenes de alta velocidad, de las paredes de los satélites, etc.



9 / Demostrando



9-1 Pruebas y demostraciones. ¿Existe la duda en matemáticas? ¿Es posible darse por satisfecho con una serie de hipótesis cuando éstas se verifican en un 99%? Las demostraciones constituyen la base de la actividad de los matemáticos y, de hecho, es lo que verdaderamente distingue a la suya de otras actividades. La complejidad del mundo plantea cada vez más preguntas a los matemáticos, que para responderlas deben enunciar conjeturas y demostrar a continuación lo adecuado de las mismas.

9-2 De Pitágoras a Wiles. ¿Cómo demostrar hipótesis que parecen verdaderas? ¿Existen números enteros tales que $x^2 + y^2 = z^2$? ¿O tales que $xn + y^n = z^n$, cuando n es un entero mayor que 2? Los griegos fueron los primeros que trataron de resolver estos problemas. Así, Pitágoras dio su nombre al teorema sobre "el cuadrado de la hipotenusa..." del que Euclides formuló la demostración más antigua que se conoce. Más tarde, Fermat afirmó que este resultado no se podía generalizar. ¡Y Wiles demostró esta conjetura en 1994!



9-3 Verdadero... y sin embargo indemostrable. ¿Podemos siempre probar una cosa de la que sabemos su veracidad? En 1931, en un genuino *golpe de teatro*, Kurt Gödel dio una respuesta negativa a esta pregunta con su famoso teorema de la "incompletitud". Gödel demostró que las nociones de verdad y de demostrabilidad no son coincidentes, al descubrir una fórmula sobre números enteros que es verdadera, pero de la que sin embargo no es posible ofrecer una demostración en términos de aritmética elemental.



Para saber más...

www.matematicas.profes.net
www.divulgamat.net
www.mathex.org